УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЕНДЖАМИНА-БОНА-МАХОНИ

Курманбаева А.К., Дурмонбаева З.А.
ИГД и ГТ, Бишкек, Кыргызстан, ainura1971@mail.ru

Аннотация: *В работе исследована краевая задача для нагруженного одномерного нелинейного уравнения Бенджамина-Бона-Махони.Методом редукции к интегральным уравнениям Вольтерра 2-го рода доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.*

Ключевые слова: *нагруженное уравнение, нелинейная система, интегральное уравнение.*

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED NONLINEAR EQUATION OF BENJAMIN-BONA-MAHONY

Kurmanbaeva A.K., Durmonbaeva Z.A.
Institute of mining and mining technologies, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *In this paper a boundary value problem for loaded one-dimensional nonlinear equation of Benjamin-Bona-Mahony is researched. Reduction method for Volterra integral equations of the 2nd kind of posed unique solvability of the problem.*

Key words: *loaded equation, nonlinear system, integral equation.*

В настоящей работе исследуется краевая задача для нелинейного нагруженного уравнения Бенджамина-Бона-Махони.

Наиболее общее определение нагруженного уравнения впервые дано А.М.Нахушевым.

Как известно [1], заданное в n – мерной области Ω евклидова пространства точек $x=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ уравнение

$$Au(x)=f(x), \tag{0.1}$$

называется нагруженным, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на многообразиях принадлежащих замыканию $\overline{\Omega}$ размерности меньше n.

Нагруженное уравнение (0.1) называется нагруженным дифференциальным уравнением в области $\Omega \subset R^n$ [1], если его можно представить в виде

$$Au(x) \equiv Lu(x)+Mu(x)=f(x), \tag{0.2}$$

где L- дифференциальный оператор, M- дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятие следа от искомого решения $u(x)$ на многообразиях не нулевой меры принадлежащих $\overline{\Omega}$ размерности строго меньше n.

Современная теория краевых задач для нагруженных уравнений параболического и гиперболического типов изложены в монографиях [1-3].

Задача Коши и краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка, а также нагруженные уравнения, связанные с обратными задачами для псевдопараболических уравнений изучены в работе [4].

1.Постановка задачи. В области $Q_T=\{(x,t): x\in(0,l), t\in(,T]\}$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t(x,t)-u_{xxt}(x,t)-\alpha\, u_x(x,t)+q(x_0,t)u(x_0,t)u_x(x_0,t)=0,\ (x,t)\in Ц_T, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

где x_0 - фиксированная точка промежутка $[0,l]$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Если $\varphi(x) \in C^1([0,l]), \varphi''(x) \in L_1(0,l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $q(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, то существует единственное решение задачи (1)-(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Перенося в формуле (1) слагаемое $q(x,t)u_x(x_0,t)u(x_0,t)_x + \alpha u_x(x,t)$ в правую часть и обращая оператор $I - \partial^2 / \partial x^2$, из условий (1), (3) получим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t = \int_0^l G(x,\xi)[q(\xi,t)u_x(x_0,t)u(x_0,t) + \alpha u_\xi(\xi,t)]d\xi, \tag{4}$$

где $G(x,\xi) = \dfrac{1}{shl}\begin{cases} shx \cdot sh(l-\xi), & 0 \le x \le \xi \\ sh\xi \cdot sh(l-x), & \xi \le x \le l. \end{cases}$

Интегрирование последнего уравнения по переменной t, при условии (2) дает

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi)[q(\xi,t)u_x(x_0,t)u(x_0,t) + \alpha u_\xi(\xi,t)]d\xi + \varphi(x). \tag{5}$$

Положив в (5) $x = x_0$, получим

$$u(x_0,t) = \varphi(x_0) + \int_0^t K(t,\tau)u(x_0,\tau)u(x_0,\tau) + \alpha G_\xi(x_0,\xi)u(\xi,\tau)d\tau, \tag{6}$$

где $\quad K(t,\tau) = \int_0^l G(x_0,\xi)q(\xi,\tau)d\xi.$

Далее продифференцировав соотношение (5) по переменной x и положив $x = x_0$, имеем

$$u_x(x_0,t) = \int_0^t \int_0^l G_x(x_0,\xi)[q(\xi,t)u_x(x_0,t)u(x_0,t) + \alpha u_\xi(\xi,t)]d\xi + \varphi'(x_0). \tag{7}$$

Таким образом, получили нелинейную систему интегральных уравнений относительно функций $u(x,t), u(x_0,t), u_x(x_0,t)$. Из условий, наложенных на функции $q(x,t), \varphi(x)$ вытекают, что функции $G(x_0,t),\ G_x(x_0,t), K(t,\tau)$ являются непрерывными функциями. Следовательно, система уравнений (5)-(7) по теории интегральных уравнений Вольтерра [4], имеет единственное решение.

Использованная литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.
2. Дженалиев М.Т. Дженалиев, М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы: Компьютер. центр ИТПМ, 1995. – 270 с.
3. Дженалиев М.Т.Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: FЫЛЫМ, 2010. – 334 с.
4. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: Илим, 2001. – 183 с.