УДК 517.946+517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Аблабеков Б.С.
ИГД и ГТ, Бишкек, Кыргызстан, ablabekov63@mail.ru

Аннотация: *Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных, моделирующего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости.*

Ключевые слова: *свободная поверхность фильтрующейся жидкости.*

SOLUTIONSCAUCHY PROBLEM FORGROUND WATER FLOWWITH A FREE SURFACE

Аблабеков Б.С.
Institute of mining and mining technologies, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: *The Cauchy problem fora linear differential equationin partial derivatives, modelingthe evolution of the free surface of filtered fluidisconsidered.*

Key words: *free filter surface of the liquid.*

Постановка задачи.

Требуется найти непрерывное решение $u(x,t)$ в прямоугольной области $Q=\{(x,t):\quad x\in R,\quad t\in(0,T]\}$ удовлетворяющее уравнению для одномерного движения жидкости плоскими волнами

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\gamma\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}=0,$$

начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in R,$$

где $u_0(x)$ – заданная функция.

1. **Фундаментальное решение и его свойства.**

Построим фундаментальное решение $E(x,t)$ оператора.

$$A\equiv\frac{\partial}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\gamma\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}.$$

По определению $E(x,t)$ есть [2] обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению

$$AE\equiv\frac{\partial E}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^4 E}{\partial x^4}-\gamma\frac{\partial^3 E}{\partial t\partial x^2}=\delta(x,t), \tag{1}$$

где $\delta(x,t)$ - обобщенная функция Дирака.

Ограничиваясь пространством $S'(R^2)$ обобщенных функций медленного роста, для построения $E(x,t)$ воспользуемся типичным приемом, применив к (1) преобразование Фурье по переменной x.

Обозначим через

$$\hat{E}(\xi,t) = F_x[E(x,t)]$$

преобразование Фурье функции $E(x,t)$. Тогда относительно $\hat{E}(\xi,t)$ получим следующее уравнение

$$A\hat{E}(\xi,t) \equiv \frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + \alpha\xi^2\hat{E} - \beta\xi^4\hat{E} + \gamma\xi^2\frac{\partial \hat{E}}{\partial t} = \delta(t),$$

или

$$A\hat{E}(\xi,t) \equiv \frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + \frac{(\alpha - \beta\xi^2)\xi^2}{1+\gamma\xi^2}\hat{E} = \frac{1}{1+\gamma\xi^2}\delta(t).$$

Его решением является функция

$$\hat{E}(\xi,t) = \frac{\theta(t)}{1+\gamma\xi^2}\hat{Z}(\xi,t),$$

где

$$\hat{Z}(\xi,t) = \exp\left\{-\frac{(\alpha - \beta\xi^2)\xi^2}{1+\gamma\xi^2}t\right\}$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} + \frac{(\alpha - \beta\xi^2)\xi^2}{1+\gamma\xi^2}\hat{Z} = 0$$

и начальному условию

$$\hat{Z}(\xi,0) = 1.$$

Обратное преобразование дает

$$E(x,t) = \theta(t)Z(x,t),$$

где $\theta(t)$ - функция Хэвисайда, а

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(\alpha-\beta\xi^2)\xi^2}{1+\gamma\xi^2}t + i\xi|x|}\,d\xi\,. \tag{2}$$

Заметим, что знак модуля в показателе экспоненты в этой формуле поставлен лишь для того, чтобы подчеркнуть четность функции $E(x,t)$ по переменной *x*, которая легко усматривается из явного вида (2).

2. Задача Коши.

Задача 1.

Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению

$$Au \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \gamma\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{4}$$

и принадлежащую при некотором γ классу $C^{(4,1)}_{M_\gamma}(Q_T)$.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x,t)$ является решениям задачи (8), (9). Тогда функция $v(x,t)=\theta(t)u(x,t)$ является решением задачи

$$Av \equiv \theta(t) f(x,t) - \left(\gamma u_0''(x) - u_0(x)\right)\delta(t), \tag{5}$$

$$v(x,t)\big|_{t<0} = 0. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство $v(x,t)=\theta(t)u(x,t)$ и свойство δ-функции, находим

$$v_t(x,t) = \theta(t)u_t(x,t) + \delta(t)u(x,t) = \theta(t)u_t(x,t) + \delta(t)u_0(x)$$

$$v_{xx} = \theta(t)u_{xx}(x,t), \quad v_{xxt} = \theta(t)u_{xxt}(x,t) + \delta(t)u_0''(x),$$

$$v_{xxxx} = \theta(t)u_{xxxx}(x,t).$$

Отсюда получаем

$$Av \equiv \theta(t)Au - \left(\gamma u_0''(x) - u_0(x)\right)\delta(t) = \theta(t) f(x,t) - \left(\gamma u_0''(x) - u_0(x)\right)\delta(t).$$

Второе из равенств (6) является прямым следствием равенства $v(x,t)=\theta(t)u(x,t)$. Действительно, $v\big|_{t<0} = \theta(t)u\big|_{t<0} = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Если $u(x) \in C^{(4)}_{M_\gamma}(R)$, $f(x,t) \in C^{(0,0)}_{M_\gamma}(Q_T)$ при γ<1-T, то существует единственное классическое решение задачи (3), (4), принадлежащее в $C^{(4,1)}_{M_\gamma}(Q_T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим решение этой задачи, используя фундаментальное решение оператора *L*. Для этого сначала докажем существование и единственность решения соответствующей обобщенной задачи Коши (5), (6), затем покажем принадлежность обобщенного решения $C^{(4,1)}_{M_\gamma}(Q_T)$ и воспользуемся леммой из [2].

Теперь заменим задачу (3), (4) на обобщенную задачу Коши (5), (6). Так как $f \in M_\gamma$, $L_1[u_0] \in M_\gamma$, то существует свертка правой части уравнения (6) с фундаментальным решением оператора *L* и потому обобщенное решение задачи Коши (5), (6) существует в $D(R^2)$ и дается [2] по формуле

$$v(x,t) = E(x,t) * \left[\theta(t) f(x,t) - \left(\gamma u_0''(x) - u_0(x)\right)\delta(t)\right] \tag{7}$$

где символ * означает свертку. Вычислив свертку в (7), и, положив $v=\theta(t)u(x,t)$, приходим к заключению теоремы. Следовательно, обобщенное решение задачи (5), (6) существует, единственно. Отсюда в силу гладкости заданных функций и используя лемму 1, легко доказать, что задача (3)-(4) имеет единственное классическое решение.

Использованная литература

1. Дзекцер Е.С., Шадрин Г.А. О движении грунтовых вод со свободной поверхностью – Труды производственного и научно-исследовательского института по инженерным изысканиям в строительстве Госстроя СССР. – М., Вып.10, 1971. – С. 22-44.
2. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 329 с.