

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СЕЙСМИКИ

Сатыбаев А. Дж.

Ошский технологический университет, Ош, Кыргызстан

Аннотация: В статье рассмотрено построение численного алгоритма решения одномерной обратной задачи волновых процессов - сейсмики.

Ключевые слова: волновой процесс, конечно-разностный метод, сейсмика.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING ONE ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF SEISMICS

Satybaev A.J.

Osh University of technology, Osh, Kyrgyzstan, abdu-satybaev@mail.ru

Annotation: The article considers the construction of a numerical algorithm for solving the one-dimensional inverse problem of wave processes-seismics.

Key words: the wave process, finite difference method, seismic activity.

Одномерные обратные задачи волновых процессов в теоретическом и прикладном аспекте в различных постановках исследованы в работах ученых А.С. Алексеева [1-2], М.М. Лаврентьева [3-4], А.Б. Баева [5], В.Г. Романова [6], С.И. Кабанихина [7], В.Г. Яхно, К.Г. Резницкой [8].

1. Постановка задачи. На основе линейного приближения можно получить одномерную прямую задачу сейсмики [9]

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_0(x_3, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_0(x_3, t)}{\partial x_3} \right), \quad x_3 \in R_+, t \in R_+, \quad (1)$$

$$u_0(x_3, t) \Big|_{t < 0} \equiv 0, \quad \mu_0(x_3) \frac{\partial u_0(x_3, t)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = -\frac{1}{2} \delta(t), \quad t \in R_+, \quad (2)$$

где $\rho_0(x_3)$ - плотность среды, $\mu_0(x_3)$ - коэффициент Ламе, $u_0(x_3, t)$ - смещения.

Условие (2) означает, что среда до определенного времени $t=0$ находится в покое и в момент времени $t=0$ на поверхность Земли действует мгновенный источник по времени $\delta(t)$ - дельта функция Дирака.

Обратная задача заключается в определении $\mu_0(x_3)$ - коэффициента Ламе при известной $\rho_0(x_3)$ и дополнительной информации вида

$$u_0(x_3, t)|_{x_3=0} = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mu_0(x_3), \quad \rho_0(x_3) \in \Lambda_0 = \left\{ \rho_0(x) \in C^6(R_+), \rho_0'(x) \big|_{x=0} = 0, \right. \\ \left. 0 < M_1 \leq \rho_0(x) \leq M_2, \|\rho_0\|_{C^2} \leq M_3 \right\} \end{aligned} \quad (*)$$

Если выполнено условие (*), то существует решение прямой задачи. Из (1)

$$u_{0tt}(x_3, t) = (\mu_0(x_3)u_{0x_3x_3}(x_3, t) + \mu_{0x_3}(x_3)u_{x_3}(x_3, t)) / \rho_3(x_3).$$

Введем новую переменную $x = \int_0^{x_3} \frac{\sqrt{\rho_3(x_3)} dx}{\sqrt{\mu_0(x)}}$ и новые функции

$$u(x, t) = u_0(x_3, t), \quad C(x) = \sqrt{\mu_0(x_3)} / \rho_3(x_3).$$

$$u_{0tt}(x_3, t) = u_{tt}, \quad u_{0x_3x_3}(x_3, t) = u_{xx}(x, t) (\mu_0(x_3))^{-1/2}, \quad \mu_0(x_3) = C^2(x),$$

Вычислим $u_{0x_3x_3}(x_3, t) = u_{xx}(x, t) \frac{1}{\mu_0(x_3)} - \frac{\mu_0'(x_3) * u_x(x, t)}{2\mu_0^{3/2}(x_3)}, \quad \mu_0'(x_3) = 2C'(x).$

Замечание. Случай $\rho_3(x_3) = 1$ исследован в работе [10].

Тогда из (1)-(3) имеем следующую задачу

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) + \frac{C'(x)}{C(x)} u_x(x, t), \quad x \in R_+, t \in R_+, \quad (4)$$

$$u(x, t)|_{t < 0} \equiv 0, \quad C(x)u_x(x, t)|_{x=0} = -\frac{1}{2} \delta(t), \quad t \in R_+, \quad (5)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad t \in R_+.$$

Продолжим теперь функции $C(x)$ и $u(x, t)$ четным образом по переменной x на полупространство $x \in R_-$. Решение прямой задачи (4)-(5) будем искать в

$$\text{виде } u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + S(x)\theta(t - |x|), \quad x \in R, \quad t \in R_+,$$

где $\tilde{u}(x, t)$ - гладкая непрерывная функция.

В таком случае относительно функции $S(x)$ имеем обратную задачу:

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) - \frac{2S'(x)}{S(x)} u_x(x, t), \quad (x, t) \in \Delta(T), \quad (6)$$

$$u(x, t)|_{t=|x|} = S(x), \quad x \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \quad (7)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (8)$$

где $\Delta(T) = \left\{ (x, t) \in (R \times R_+) : x \in (0, \frac{T}{2}), |x| < t < T - |x| \right\}$.

Функции $S(x)$ и $C(x)$ связаны соотношением

$$S(x) = \sqrt{\frac{1}{C(0)C(x)}}. \quad (9)$$

2. Конечно-разностное решение. Теорема 1. Пусть для $f(t) \in C^4[0, T]$ существует решение обратной задачи (6)-(8) удовлетворяющее условию (*) и решению прямой задачи (4)-(5) $u(x, t) \in C^4(\Delta(t))$. Тогда, при малом T , S_i - приближенное решение обратной задачи, построенной конечно-разностным методом, сходится к точному решению обратной задачи (6)-(8) в классе C со скоростью порядка $O(h)$.

Повышенное условие $f(t) \in C^4[0, T]$ - взято для того, чтобы применить конечно-разностный метод.

Доказательство теоремы проводится по методике, приведенной в работе [10]. Введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \left\{ x_i = ih, t_k = kh, (ih, kh) : h = T/2N, \quad ih \in (0, T/2), \quad i = \overline{1, N}, \quad ih \leq kh \leq T - ih \right\}, \quad (10)$$

где h – сеточный шаг по x, t .

Составим разностную схему для обратной задачи (6)-(8)

$$u_{tt}^-(ih, kh) = u_{xx}^-(ih, kh) - 2 \frac{\frac{S_0(ih)}{x}}{\frac{S_i + S_{i-2}}{2} \cdot \frac{u_0(ih, kh)}{x}} + O(h), \quad (ih, kh) \in \Delta_h(T), \quad u_i^i = S_i, \quad i = \overline{0, N}, \quad (11)$$

$$u_o^k = f^k, \quad k = \overline{0, 2N}. \quad (12)$$

Исследуем в начале сходимости обратной задачи (11)-(12) к точному решению. Для этого распишем разностное уравнение

$$u_{i+1}^k = u_i^{k+1} + u_i^{k-1} - u_{i-1}^k + h^2 B_i^k, \\ \text{где} \quad B_i^k = \frac{S_i - S_{i-2}}{h^2} \cdot \frac{4}{S_i + S_{i-2}} \cdot (u_i^k - u_{i-2}^k). \quad (13)$$

Подставляя в правую часть последнего уравнения выражения

$u_i^{k+1}, u_i^{k-1}, u_{i-1}^{k-2}, \dots$ последовательно, получим

$$u_{i+1}^k = \frac{1}{2} [f^{k+i+1} + f^{k-i-1}] + h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{k-i-\mu+2p}. \quad (14)$$

Полагая в последнем $k=i+1$ и учитывая вторую формулу (11) имеем

$$S_{i+1} = \frac{1}{2} [f^{2i+2} + f^0] + h^2 \sum_{p=1}^i \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p}. \quad (15)$$

Из (14) следуют

$$u_i^k = \frac{1}{2} (f^{k+i} + f^{k-i}) + h^2 \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1}. \quad (16)$$

$$u_{i-2}^k = \frac{1}{2} (f^{k+i-2} + f^{k-i+2}) + h^2 \sum_{p=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{k-i-\mu+2p+3}. \quad (17)$$

Откуда

$$\frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} = \frac{1}{2h} (f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} - f^{k-i+2}) + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{k-i+\mu+1} + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{k+i-\mu-1}, \quad (18)$$

а из (16) и (17) следуют

$$S_i = \frac{1}{2} [f^{2i} + f^0] + h^2 \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p}, \quad (19)$$

$$S_{i-2} = \frac{1}{2} [f^{2i-4} + f^0] + h^2 \sum_{p=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$\frac{S_i - S_{i-2}}{h} = \frac{1}{2h} (f^{2i} - f^{2i-4}) + h \sum_{\mu=1}^{i-1} B_{\mu}^{2i-\mu-1} + h \sum_{\mu=1}^{i-3} B_{\mu}^{2i-\mu-3}. \quad (21)$$

Введем следующие обозначения

$$F_i^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f^{k+i} + f^{k-i} \\ \frac{1}{h} (f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} + f^{k-i+2}) \\ f^{2i} + f^0 \\ \frac{1}{h} (f^{2i} - f^{2i-4}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\Phi_i^k = \begin{pmatrix} u_i^k \\ \frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} \\ S_i \\ \frac{S_i - S_{i-2}}{h} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

и введем операторное выражение

$$A[\Phi_p^k] = \begin{pmatrix} h \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_p^{k-i+p+1} + B_p^{k+i-\mu-1} \\ h \sum_{\mu=1}^p B_{\mu}^{1-\mu+2p} \\ B_p^{2i-p-1} + B_{p-1}^{2i-p-2} - B_o^{2i-3} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Тогда из (16),(18), (19),(21) следует

$$\Phi_i^k = F_i^k + h \sum_{p=1}^{i-1} A[\Phi_p^k]. \quad (25)$$

Точно такое же можно получить и для $\tilde{\Phi}_i^k: \tilde{\Phi}_i^k = \tilde{F}_i^k + h \sum_{p=1}^{i-1} A[\tilde{\Phi}_p^k]$, где

вместо u_i^k, S_i записываются $\tilde{u}_i^k, \tilde{S}_i$.

Из последней формулы и (25) имеем

$$\| \Phi_i^k - \tilde{\Phi}_i^k \|_C \leq \| F_i^k - \tilde{F}_i^k \|_C + h \left\| \sum_{p=1}^{i-1} A[\Phi_p^k - \tilde{\Phi}_p^k] \right\|_C$$

Введем обозначения $\Delta_i = \max(\Phi_i^k - \tilde{\Phi}_i^k)$, $\delta_i = \max(F_i^k - \tilde{F}_i^k)$, $k = i, \dots, 2N - i$,

Используя дискретный аналог Гронуолла-Беллмана к последней формуле, имеем

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\Delta_i|_C \leq |\delta_i|_C * \exp\{h|A[\Delta_i]|_C\}$$

Доказано утверждение теоремы.

Использованная литература

1. Алексеев А. Обратные динамические задачи сейсмики. Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. – М.: Наука, 1967. – С. 9-84.
2. Алексеев А.С., Добринский В.И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики // Математические проблемы геофизики. АН СССР. Сиб. отд. ВЦ. – Новосибирск, 1975. Вып.6, Ч.2. – С. 7-53.
3. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. – Новосибирск: Наука. 1982. – 88 с.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г. и др. Некорректные задачи математической физики и анализа. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1980. – 286 с.
5. Баев А.В. Метод решения обратной задачи сейсмики с поглащением // Прямые и обратные задачи математической физики. Сб. трудов ВМК МГУ. – М.: МГУ, 1991. – С. 26-30.
6. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984.
7. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – 166 с.
8. Лаврентьев М.М., Резницкая К.Г., Яхно В.Г. Одномерные обратные задачи математической физики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1982. – 88 с.
9. Сатыбаев А.Дж. Алгоритм решения двумерно-линеаризованной обратной задачи сейсмики // Исследование по интегро-дифф. уравнениям. – Б.: Илим, 1992. – Вып. 24. – С.140-151.
10. Сатыбаев А.Дж. Численное определение коэффициента Ламэ в уравнении сейсмики // История, культура и экономика, наука юга Кыргызстана. – Ош: КУУ, 2000. – С. 148-152.