

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ
РЕАКЦИЙ В ОПОРЕ КОРОМЫСЛА УДАРНОГО МЕХАНИЗМА

Еремьянц В.Э.

КРСУ им. Б.Ельцина, Бишкек, Кыргызстан, eakr.info@gmail.com

Аннотация: Предложен приближенный метод решения системы двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих неизвестные реакции в контакте коромысла с опорой и инструментом. На примере проведена оценка точности метода.

Ключевые слова: ударная машина, коромысло, вращение, расстояние, модуль упругости, ось, дифференциальное уравнение, горизонтальное перемещение.

APPROXIMATE METHOD DYNAMIC REACTINGS ACCOUNT IN
A BEARING OF A BALANCE BEAM OF A PERCUSSION MECHANISM

Eremiants V.E.

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract: The approximate method of a solution of a system of two linear differential second-kind equations containing unknown reactings in contact of a balance beam with a bearing and the instrument is proposed. On an example the estimation of accuracy of a method is held.

Key words: impact machine, rocker, rotation, distance, modulus of elasticity, axis, differential equation, horizontal movement.

При создании кривошипно-коромысловых ударных машин одной из проблем является защита опорного узла коромысла от воздействия реактивных ударных нагрузок. В идеальном случае, когда точка соударения коромысла с инструментом совпадает с центром удара, ударные реакции в опоре коромысла равны нулю. Однако обеспечить это условие не всегда удается. Тогда возникает необходимость расчета ударных реакций в опоре коромысла и выявления степени влияния различных факторов на эти реакции.

Решение этой задачи было начато в работе [1]. Для математического описания процессов, протекающих в коромысловой ударной системе с упругой опорой коромысла, была рассмотрена расчетная схема, представленная на рис. 1. При её составлении принимались следующие допущения: горизонтальные перемещения упругой опоры коромысла (точка О, рис. 1) пренебрежимо малы по сравнению с вертикальными; коэффициент жесткости опоры является величиной постоянной; коромысло представляет собой жесткое недеформируемое тело с податливой сферической ударной частью; инструмент, по которому наносится удар коромыслом, имеет вид упругого стержня.

С учетом принятых допущений в [1] получена система дифференциальных уравнений, связывающая усилия P , возникающие в контакте коромысла с инструментом, с усилиями T , возникающими в опоре коромысла. Эти уравнения можно представить в виде:

$$\ddot{T} + k_1^2 T = -a_1 P, \quad (1)$$

$$\ddot{P} + 2h\dot{P} + k_2^2 P = -a_2 T. \quad (2)$$

$$\text{где } k_1^2 = \frac{c_0}{m\alpha_2}, \quad a_1 = \frac{c_0}{m} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 = 1 - \frac{mrS}{J}, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{mr^2}{J}, \quad (3)$$

$$h = \frac{ca}{2EF}, \quad k_2^2 = \frac{c}{m\alpha_2} \left[1 + \frac{mS^2}{J} \left(1 - \frac{2r}{S} \right) \right], \quad a_2 = \frac{c\alpha_1}{m\alpha_2}. \quad (4)$$

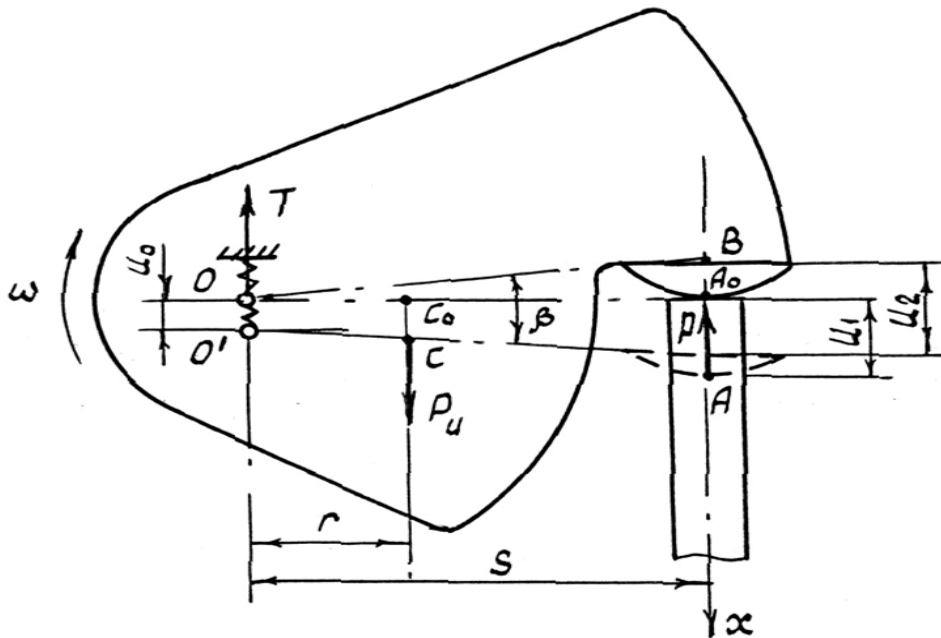


Рис. 1. Расчетная схема коромысловой системы, учитывающая податливость опоры коромысла

В формулах приняты следующие обозначения:

c_0, c – коэффициенты жесткости контакта коромысла с опорой и инструментом (для обоих контактов принимаются линеаризованные модели контактной характеристики Герца);

J – момент инерции коромысла относительно его оси вращения;

m – масса коромысла;

r – расстояние от оси вращения коромысла до его центра масс;

S – расстояние от оси вращения коромысла до продольной оси инструмента (оси удара);

E – модуль упругости материала элементов ударной системы (предполагается, что коромысло и инструмент выполнены из материала с одинаковым модулем упругости);

F – площадь поперечного сечения инструмента; a – скорость распространения волны деформации в инструменте.

Уравнение (1) – это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно T , в котором правая часть, описывающая возмущающую нагрузку, содержит усилие P . Уравнение (2) это дифференциальное уравнение относительно P , в котором возмущающей нагрузкой является усилие T .

Решение этих уравнений представляет определенную сложность. Например, если выразить из первого уравнения функцию P и подставить во второе уравнение, то получится дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции T .

Для определения вида функции, описывающей решение этого уравнения, необходимо найти корни характеристического уравнения четвертого порядка, что в общем случае затруднительно.

Если записать исходные уравнения (1) и (2) в изображениях по Лапласу, то решение уравнений не представляет труда, но возникают трудности обратного перехода от изображения искомой функции к её оригиналу. Эти трудности также связаны с необходимостью отыскания корней алгебраического уравнения четвертого порядка.

В связи с этим в данной работе предлагается приближенный метод расчета усилий, возникающих в коромысловой ударной системе при ударе, который заключается в следующем.

В первом приближении принимаем $T=0$, тогда уравнение (2) становится однородным:

$$\ddot{P} + 2h\dot{P} + k_2^2 P = 0.$$

Его решение имеет вид:

$$P(t) = \exp(-ht)(B_{11} \sin \lambda t + B_{12} \cos \lambda t); \quad \text{где } \lambda = \sqrt{k_2^2 - h^2}.$$

Здесь и далее в обозначении постоянных интегрирования (A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} и т.д.) первая цифра индекса показывает номер приближения, а вторая – номер постоянной интегрирования.

Начальные условия для этого уравнения:

$$P(0) = 0; \quad \dot{P}(0) = c[\dot{u}_1(0) - \dot{u}_2(0)] = c\omega_0 S, \quad (5)$$

где ω_0 – угловая скорость коромысла в начальный момент удара.

Из этих начальных условий находим:

$$B_{11} = c\omega_0 S / \lambda, \quad B_{12} = 0.$$

Следовательно, решение уравнение (2) в первом приближении имеет следующий вид:

$$P(t) = B_{11} \exp(-ht) \sin \lambda t. \quad (6)$$

Время действия силы в контактном сечении коромысла с инструментом определится как

$$\tau = \pi / \lambda, \quad (7)$$

а максимальное значение силы – по формуле:

$$P_m = \frac{cV_0}{k_2} \exp\left[-\frac{h}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{h}\right], \quad (8)$$

где $V_0 = \omega_0 S$ – линейная скорость соударения коромысла с инструментом.

Подставляя решение (6) в уравнение (1), получим уравнение для определения усилия в контакте коромысла с опорой в первом приближении:

$$\ddot{T} + k_1^2 T = -a_1 B_{11} \exp(-ht) \sin \lambda t. \quad (9)$$

Общее решение этого неоднородного уравнения состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Начальные условия для его решения:

$$T(0) = 0; \quad \dot{T}(0) = \dot{u}_0 c = 0, \quad (10)$$

где u_0 – деформация опоры.

Общим решением однородного уравнения, левая часть которого имеет вид (9), является функция:

$$\bar{T}(t) = A_{11} \sin k_1 t + A_{12} \cos k_1 t.$$

Частное решение уравнения (9) ищем в виде:

$$\tilde{T}(t) = \exp(-ht)(C_{11} \sin \lambda t + C_{12} \cos \lambda t).$$

Дифференцируя эту функцию по времени, подставляя в правую часть уравнения (9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой части уравнения, найдем:

$$C_{11} = -\frac{a_1 B_{11}}{H_0} (h^2 - \lambda^2 + k_1^2), \quad C_{12} = -\frac{a_1 B_{11}}{H_0} 2h\lambda,$$

$$\text{где } H_0 = (h^2 - \lambda^2 + k_1^2)^2 + 4h^2 \lambda^2 = (k_2^2 - k_1^2) + 4h^2 k_1^2.$$

Записывая общее решение уравнения (9) в виде:

$$T(t) = \bar{T}(t) + \tilde{T}(t) = A_{11} \sin k_1 t + A_{12} \cos k_1 t + \exp(-ht)[C_{11} \sin \lambda t + C_{12} \cos \lambda t], \quad (11)$$

и находя постоянные интегрирования A_{11} и A_{12} из начальных условий (10):

$$A_{11} = \frac{a_1 B_{11} \lambda}{H_0 k_1} (k_1^2 - k_2^2), \quad A_{12} = \frac{a_1 B_{11}}{H_0} 2h\lambda = -C_{12},$$

получим:

$$T(t) = \frac{a_1 B_{11}}{H_0} \left\{ \frac{\lambda}{k_1} (k_1^2 - k_2^2) \sin k_1 t + 2h\lambda \cos k_1 t - \exp(-ht) \left[(h^2 - \lambda^2 + k_1^2) \sin \lambda t + 2h\lambda \cos \lambda t \right] \right\}. \quad (12)$$

Это решение можно представить в более компактном виде:

$$T(t) = D_{11} \sin(k_1 t + \theta_{11}) + D_{12} \exp(-ht) \sin(\lambda t + \theta_{12}), \quad (13)$$

где

$$D_{11} = \frac{a_1 B_{11}}{H_0} \sqrt{\frac{\lambda^2}{k_1^2} (k_1^2 - k_2^2)^2 + 4h^2 \lambda^2}, \quad D_{12} = \frac{a_1 B_{11}}{\sqrt{H_0}},$$

$$\theta_{11} = \arctg\left(\frac{2hk_1}{k_1^2 - k_2^2}\right), \quad \theta_{12} = \arctg\left(\frac{2h\lambda}{h^2 - \lambda^2 + k_1^2}\right).$$

Из выражения (13) видно, что колебания опоры описываются суммой двух гармонических функций.

При этом одна гармоника имеет частоту, равную собственной частоте колебаний опоры, а другая – частоту, равную частоте ударного импульса, генерируемого в контакте коромысла с инструментом.

Гармоника с собственной частотой является незатухающей, а гармоника с частотой вынуждающей нагрузки – затухающая (в действительности, конечно, обе гармоники будут затухающими, так как в опоре всегда будут какие-то потери энергии).

Подставляя функцию (12) в правую часть уравнения (2) и вводя обозначения:

$$H_{11} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0} \frac{\lambda}{k_1} (k_1^2 - k_2^2), \quad H_{12} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0} 2h\lambda, \quad H_{13} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0} (h^2 - \lambda^2 + k_1^2),$$

запишем это уравнение в виде:

$$\ddot{P} + 2h\dot{P} + k_2^2 P = -H_{11} \sin k_1 t - H_{12} \cos k_1 t + \exp(-ht) (H_{13} \sin \lambda t + H_{12} \cos \lambda t). \quad (14)$$

Решением этого уравнения при начальных условиях (5) является функция:

$$P(t) = B_{21} \sin k_1 t + B_{22} \cos k_1 t + t \exp(-ht) (B_{23} \sin \lambda t + B_{24} \cos \lambda t) + \exp(-ht) (B_{25} \sin \lambda t + B_{26} \cos \lambda t). \quad (15)$$

где

$$B_{21} = \frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0^2} \frac{\lambda}{k_1} \left[(k_2^2 - k_1^2)^2 - 4h^2 k_1^2 \right], \quad B_{22} = -\frac{a_1 a_2 B_{11}}{H_0^2} 4h\lambda (k_2^2 - k_1^2),$$

$$B_{23} = \frac{a_1 a_2 B_{11} h}{H_0}, \quad B_{24} = -\frac{a_1 a_2 B_{11} (h^2 - \lambda^2 + k_1^2)}{H_0 2\lambda}.$$

$$B_{25} = B_{11} - \frac{k_1}{\lambda} B_{21} - \frac{h}{\lambda} B_{22} - \frac{1}{\lambda} B_{24}, \quad B_{26} = -B_{22}.$$

Используя последние соотношения в решении (15), представим его в виде:

$$P(t) = B_{11} \exp(-ht) \sin \lambda t + B_{21} \sin k_1 t + B_{22} \cos k_1 t - \frac{\exp(-ht)}{\lambda} [(k_1 B_{21} + h B_{22} + B_{24}) \sin \lambda t + \lambda B_{22} \cos \lambda t] + t \exp(-ht) (B_{23} \sin \lambda t + B_{24} \cos \lambda t). \quad (16)$$

Очевидно, что первый член этого решения представляет собой решение первого приближения (6). Остальные члены являются уточнением решения во втором приближении.

Подставляя решение (15) в правую часть уравнения (1) получим уравнение для определения реакции в опоре коромысла во втором приближении:

$$\ddot{T} + k_1^2 T = -a_1 \{ B_{21} \sin k_1 t + B_{22} \cos k_1 t + \exp(-ht) (B_{25} \sin \lambda t + B_{26} \cos \lambda t) + t \exp(-ht) (B_{23} \sin \lambda t + B_{24} \cos \lambda t) \}. \quad (17)$$

Решением этого уравнения при начальных условиях (10) является функция:

$$T(t) = A_{21} \sin k_1 t + A_{22} \cos k_1 t + t (C_{21} \sin k_1 t + C_{22} \cos k_1 t + \exp(-ht) (C_{23} \sin \lambda t + C_{24} \cos \lambda t) + t \exp(-ht) (C_{25} \sin \lambda t + C_{26} \cos \lambda t)), \quad (18)$$

где

$$C_{21} = -\frac{a_1}{2k_1} B_{22}, \quad C_{22} = \frac{a_1}{2k_1} B_{21},$$

$$C_{25} = -\frac{a_1}{H_0} [(h^2 - \lambda^2 + k_1^2) B_{23} - 2h\lambda B_{24}], \quad C_{26} = -\frac{a_1}{H_0} [(h^2 - \lambda^2 + k_1^2) B_{24} + 2h\lambda B_{23}],$$

$$C_{23} = \frac{1}{H_0} [(h^2 - \lambda^2 + k_1^2) (2hC_{25} + 2\lambda C_{26} - a_1 B_{25}) - 2h\lambda (2\lambda C_{25} + 2hC_{26} + a_1 B_{22})],$$

$$C_{24} = \frac{1}{H_0} [(h^2 - \lambda^2 + k_1^2) (2\lambda C_{25} + 2hC_{26} + a_1 B_{22}) + 2h\lambda (2hC_{25} + 2\lambda C_{26} - a_1 B_{25})],$$

$$A_{21} = -\frac{1}{k_1} (C_{22} + \lambda C_{23} - hC_{24} + C_{26}), \quad A_{22} = -C_{24}.$$

Далее, подставляя решение (18) в правую часть уравнения (2) можно найти зависимость $P(t)$ в третьем приближении и т.д.

При этом решение в третьем приближении будет содержать члены, пропорциональные произведению t^2 на тригонометрические функции, следующее приближение будет включать произведения t^3 на эти функции и т.д.

В качестве примера использования предлагаемого метода, приведем результаты расчета динамических усилий, возникающих в ударной системе кривошипно-коромыслового молота МО-100.

Исходные данные для этой ударной системы следующие: момент инерции коромысла: $J = 0,734 \text{ кгм}^2$; масса коромысла: $m = 35,1 \text{ кг}$; координаты центра масс коромысла: $x_C = r = 106 \text{ мм}$, $y_C = 0$; радиус сферы ударной части коромысла: $R_C = 60 \text{ мм}$; диаметр инструмента $d = 80 \text{ мм}$; линейная скорость соударения коромысла с инструментом $V_0 = \omega_0 S = 10 \text{ м/с}$.

Модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона для материалов коромысла, инструмента и подшипника примем одинаковыми и равными: $E = 20,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 0,3$.

Принималось, что расстояние S отличается от оптимального, определяемого соотношением $mrS/J = 1$, на 10 %. При этом $\alpha_2 = 0,1$.

Для оценки влияния жесткости опоры на динамические усилия, возникающие в системе, рассматривалось три случая с различными значениями коэффициента k_n , равными: $40 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}$; $80 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}$; $160 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}$. Среднее из указанных трех значений соответствует паре шариковых подшипников типа 310. Считалось, что податливость оси коромысла пренебрежимо мала по сравнению с податливостью подшипников.

Расчет проводился в следующем порядке. Вначале, исходя из опыта, задавалось некоторое значение максимального усилия в контакте коромысла с инструментом P_m и по известным формулам [1]: находился

$$c = 1,25 K^{2/3} P_m^{1/3}, \quad K = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{R_C},$$

коэффициент жесткости контакта коромысла с инструментом c .

Затем определялись коэффициенты (3), (4) и по формуле (8) находилось значение P_m . По этому значению уточнялся коэффициент c , вновь находилось значение P_m и т.д., пока расхождение в результатах предыдущего и последующего циклов расчета не становилось меньше 0,1%. С учетом уточненных таким образом коэффициентов по формуле (6) строился график функции $P(t)$ в первом приближении. Этот график показан на рис. 2а.

Аналогично, задавая максимальным значением силы в контакте коромысла с опорой T_m , находилось значение коэффициента жесткости подшипников опоры c_0 по известной формуле [2]:

$$c_0 = k_n T_m^{1/3}, \quad k_n = \frac{3,34 (zk_B)^{2/3}}{1 + \sqrt[3]{r_1/r_2}}, \quad k_B = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{\frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3}}.$$

где r_1 , r_2 – соответственно радиусы контактных поверхностей внутреннего и наружного колец подшипника; r_3 – радиус шарика; z – количество шариков в подшипнике; T_m – максимальное значение радиальной силы, действующей на подшипники.

После определения необходимых коэффициентов (3), (4), из формул (12) или (13) находилось максимальное значение усилия в контакте коромысла с опорой T_m и по нему уточнялось значение коэффициента c_0 . Затем вновь находилось значение T_m и т.д., пока разность между результатами предыдущего и последующего циклов расчета не становилась меньше 0,1 %.

После этого по формуле (12) строилась зависимость усилия в контакте коромысла с опорой от времени $T(t)$ в первом приближении (рис. 3а).

Далее находились поправки второго приближения. Для этого формулы (16) и (18) записывались в виде:

$$P(t) = P_1(t) + \Delta P(t), \quad T(t) = T_1(t) + \Delta T(t),$$

где $P_1(t)$, $T_1(t)$ – функции, полученные в первом приближении; $\Delta P(t)$, $\Delta T(t)$ – поправки второго приближения. Из этих формул находились зависимости $\Delta P(t)$, $\Delta T(t)$, графики которых представлены на рис. 2б и 3б.

На рис. 2а видно, что в первом приближении закон изменения усилий в контакте коромысла с инструментом не зависит от жесткости опоры. Это связано с тем, что в первом приближении принималось: $T = 0$. Но, как следует из рис. 2б, поправка второго приближения, учитывающая силу T , несущественна. Например, при $k_n = 80 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}$ (что соответствует паре шариковых подшипников 310) величина ΔP не превышает 20 кН и составляет около 2% от максимального значения силы P . С увеличением жесткости опоры (например, за счет замены шариковых подшипников роликовыми) поправка второго приближения становится еще меньше. С уменьшением жесткости опоры величина ΔP возрастает, но её максимальное значение приходится на конечную часть ударного импульса $P(t)$. Это приводит к незначительному (менее 1%) увеличению длительности взаимодействия коромысла с инструментом.

Во всех рассмотренных случаях уточнение максимального значения контактной силы P_{m1} не превышает 0,2%, что несущественно.

$$1 - k_n = 40 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}, \quad 2 - k_n = 80 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}, \quad 3 - k_n = 160 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м},$$

Анализируя рис. 3а можно отметить, что величина коэффициента жесткости опоры оказывает существенное влияние на характер изменения усилий в опоре от времени.

В зависимости от жесткости эти усилия могут иметь даже знакопеременный характер (кривая 2), но при этом в исследованном диапазоне изменения коэффициента жесткости опоры максимальные значения усилий отличаются друг от друга незначительно и составляют 17-18% от усилий в контакте коромысла с инструментом.

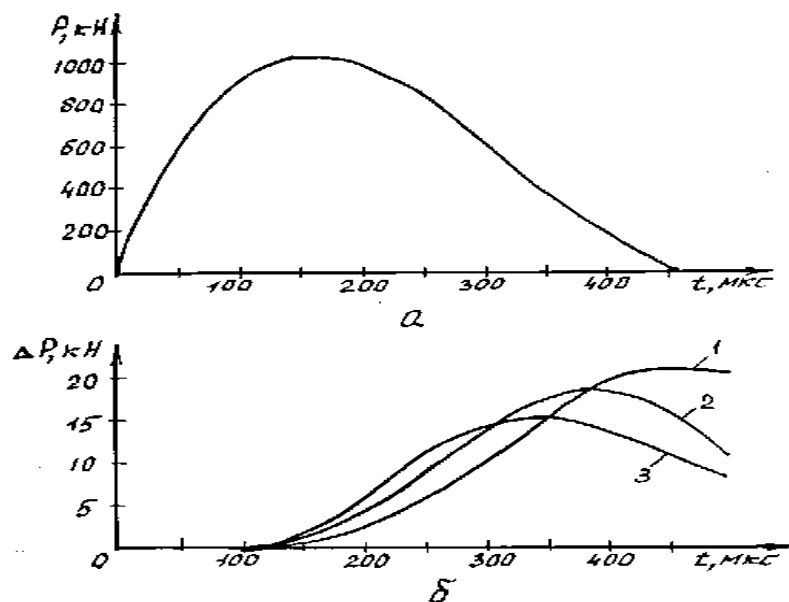


Рис.2. Зависимость усилия в контакте коромысла с инструментом от времени в первом приближении (а) и поправка, вносимая вторым приближением (б) при различных значениях жесткости опоры:

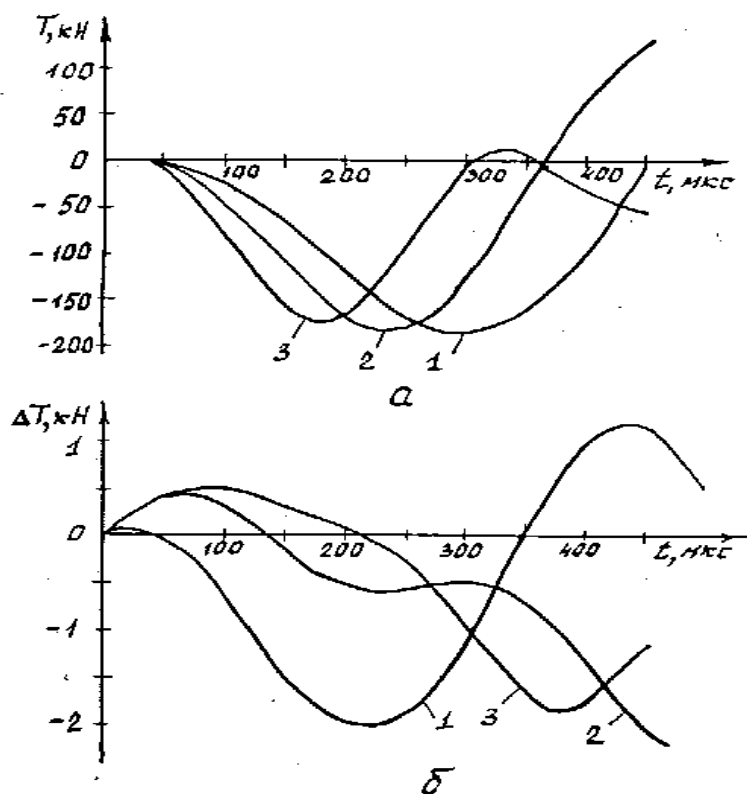


Рис.3. Зависимость усилия в контакте коромысла с опорой от времени в первом приближении (а) и поправка, вносимая вторым приближением (б) при различных значениях жесткости опоры:

Поправка второго приближения в определении усилий в контакте коромысла с опорой ΔT не превышает 2 кН (рис. 3б). Поскольку максимумы функций $T_1(t)$ и $\Delta T(t)$ не совпадают по времени, то поправка максимального значения T_{m1} будет составлять менее 1 %, что также несущественно.

$$1 - k_n = 40 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}, 2 - k_n = 80 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м}, 3 - k_n = 160 \cdot 10^6 \text{ Н}^{2/3}/\text{м},$$

Обобщая полученные результаты можно отметить следующее.

Предложен приближенный метод оценки динамических усилий, возникающих в коромысловой ударной системе с упругой опорой коромысла. Выведены формулы для определения усилий в контакте коромысла с инструментом и с опорой в первом и втором приближениях.

На примере расчета ударной системы молота МО-100 показано, что в реальных системах для получения достаточной для инженерной практики точности достаточно ограничиться первым или вторым приближениями.

В исследованном диапазоне изменения параметров коромысловой ударной системы молота МО-100 жесткость опоры практически не оказывает влияние на усилия в контакте коромысла с инструментом и мало влияет на максимальные усилия в контакте коромысла с опорой.

Следует отметить, что этот вывод относится только к рассмотренному примеру.

Возможно, что при других параметрах системы влияние жесткости опоры на параметры ударных процессов будет более существенным.

Предлагаемый метод может быть эффективно использован в дальнейшем для более подробного изучения влияния различных факторов на ударные процессы в коромысловых системах.

Использованная литература

1. Еремянц В.Э. Расчет ударных процессов в машинах. Часть 4. Коромысловые ударные системы и системы с неторцевым соударением элементов. Учебное пособие / Кыргызско-Российский Славянский университет. – Бишкек, 2003. – 56 с.
2. Еремянц В.Э., Хренова М.В. Определение приведенного коэффициента жесткости опорного узла коромысла ударного механизма / Повышение эксплуатационной эффективности транспортных, строительно-дорожных машин и коммуникаций в условиях высокогорья и жаркого климата. Материалы международной научно-практической конференции. – Бишкек: КГУСТА, 2002. – С.97 – 104.

